DESCOMPOSICIÓN DE POLINOMIOS 4º ESO MATEMÁTICAS B

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$ Se ha sacado factor común x^4. Las posibles raíces enteras de $x^3-x^2-\mathbf{4}$ son los **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4**

-4 distinto de 0, 1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6**

-6 distinto de 0, -1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 es raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x-\mathbf{2})\cdot(x^2+x+2)$

$\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$. Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x-\mathbf{2}$ son los **divisores de -2**:

1,-1, 2,-2

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5**

-5 distinto de 0, 1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1**

1 distinto de 0, -1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2**

-2 distinto de 0, 2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22**

22 distinto de 0, -2 no es raíz de P

$\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$ No tiene raíces enteras

Si los coeficientes de $\mathbf{P(x)}=\mathbf{p_n}x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+\mathbf{p_0}$ son números enteros, las posibles raíces racionales de P(x) son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Por ejemplo, las posibles raíces en Q de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ son los cocientes de los divisores de 6 entre los divisores de 12,

$$\frac{\text{divisores de } 6}{\text{divisores de } 12};\qquad \frac{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm6}{\pm1\ \ \pm2\ \ \pm3\ \ \pm4\ \ \pm6\ \ \pm12}$$

$$\pm1\quad \pm\frac{1}{2}\quad \pm\frac{1}{3}\quad \pm\frac{1}{4}\quad \pm\frac{1}{6}\quad \pm\frac{1}{12}\quad \pm2\quad \pm\frac{2}{3}\quad \pm3\quad \pm\frac{3}{2}\quad \pm\frac{3}{4}\quad \pm6$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ni 1, ni-1 son raíces de P.

Veamos por la Regla de Ruffini si 1/2 es raíz de P

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 es raíz de P.

Al resolver la ecuación $12x^2+10x-12=0$, se obtiene que -3/2 y 2/3 son raíces de P.

$\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$

Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

$$\frac{\text{divisores de } -4}{\text{divisores de } 1}; \quad \frac{\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4}{\pm 1}$$

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil la descomposición factorial:

$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$

El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

Veamos un ejemplo común a resolver aplicando la Regla de Ruffini.
Vamos a hallar la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}$
Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 8 \quad \pm 12 \quad \pm 24$$

Vemos que 1 no es raíz

	1	0	-15	10	24
1)		1	1	-14	-4
	1	1	-14	-4	**20**

Probemos con -1

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**

$\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}=$
$(x+1)\cdot(x^3-x^2-14x+24)$
Seguiremos probando raíces sobre este nuevo polinomio de grado tres,
-1 no es raíz, 1 no hay que probarla porque no era, probamos con 2, (normalmente sin volver a copiar lo anterior, se prueba debajo):

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

Las posibles raíces enteras de este nuevo polinomio de grado dos son los divisores de -12, pero ya sabemos que 1 y -1 no son raíces, por tanto se empieza a probar con 2, no es, -2, no, 3 sí

$$\boxed{\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)}$$

Veamos por último, como repaso, un ejemplo en el que se aplican todos los métodos explicados para la descomposición factorial de polinomios.
Se trata de descomponer $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$

Se aplican las **identidades notables**: diferencia de cuadrados=suma por diferencia
$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$

El primer factor $(3x^3+6x)$ descompone sacando **factor común** 3x,
$(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$;
x^2+2 es primo pues la ecuación de segundo grado $x^2+2=0$ no tiene raíces reales.

En el factor (x^3-4x+3) **se buscan sus raíces racionales**

$$1 \quad -1 \quad 3 \quad -3$$

Vemos que 1 es raíz

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$
Para descomponer x^2+x-3 se resuelve la **ecuación de segundo grado**
$x^2+x-3=0$ que tiene por soluciones
$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\boxed{\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}=3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$$