

$$T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = ?$$

$$T_{n+1} - T_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Como la diferencia es un polinomio de grado 2, T_n será de grado 3

$$T_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Hagamos la diferencia

$$A(n+1)^3 - An^3 = 3An^2 + 3An + A$$

$$B(n+1)^2 - Bn^2 = 2Bn + B$$

$$C(n+1) - Cn = C$$

$$n^2 + 2n + 1$$

$$3A=1 \quad \rightarrow A=1/3$$

$$3A+2B=2 \quad \rightarrow B=1/2$$

$$A+B+C=1 \quad \rightarrow C=1/6$$

$$T_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

$$T_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + D$$

Y como $T_1 = 1$

$$T_1 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}1 + D \rightarrow D=0$$

Se concluye que

$$T_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$